# Allenamento di matematica
# Simulazione di San Valentino
# Brescia - 12 febbraio 2016
# Soluzioni commentate

1. **La lotteria di San Valentino.** La probabilità di uscita di un multiplo di 14 vale $\frac{1}{8}$ per cui la probabilità richiesta è

$$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4 \cdot \frac{7}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^5 = \frac{989}{8192}.$$

Dunque la risposta è $989 + 8192 = 9181$.

2. **Cena di San Valentino.** Si ha subito che la probabilità richiesta vale

$$\frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} = \frac{1}{100}$$

per cui la risposta è $1 + 100 = 101$.

3. **Il percorso di San Valentino.** La probabilità che San Valentino arrivi al termine di ciascuna strada è dato da

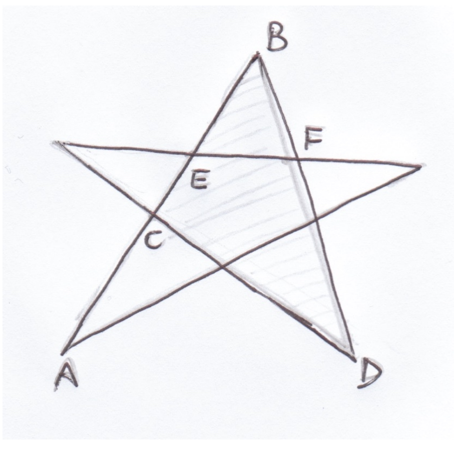
| | arrivare | non arrivare |
|---|---|---|
| prima strada | $\frac{7}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |
| seconda strada | $\frac{16}{25}$ | $\frac{9}{25}$ |
| terza strada | $\frac{9}{25}$ | $\frac{16}{25}$ |

La probabilità di arrivare è

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{17}{30}$$

e dunque la risposta è $17 + 30 = 47$.

4. **Torroncini di San Valentino.** Facendo riferimento alla figura seguente




si ha, posto $BD = d$, grazie a note proprietà del pentagono,

$$CB = CD = d\phi, \quad \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ne segue che se $A$ denota l'area del triangolo aureo $ABC$ si ha

$$A = \frac{d^2}{4}\sqrt{3-4\phi}.$$

Il triangolo $BEF$ è anch'esso aureo e la sua area $B$ vale, per similitudine, $B = \phi^3 A$. Dunque usando le formule per semplificare i radicali doppi e ricordando che

$$d = \frac{1}{\sqrt{7\sqrt{5}-15}\sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}$$

l'area richiesta vale

$$A + 3\phi^3 A = \frac{1}{8} = 0.125$$

per cui la risposta è 125.

5. **Il ciondolo di San Valentino.** Siano $M$ e $V$ rispettivamente la massa e il volume del ciondolo e siano $m_e$ e $v_e$ la massa ed il volume dell'elemento. Allora $M = m_o + m_a = d_o\, v_o + d_a\, v_a$ e $V = v_o + v_a$. Quindi

$$d_o\, v_o = M - d_a\, v_a = M - d_a\, (V - v_o) \Rightarrow (d_o - d_a)\, v_o = M - d_a\, V$$

e

$$(d_o - d_a)\, v_a = d_o\, V - M.$$

Ne segue che

$$\frac{v_o}{v_a} = \frac{M - d_a\, V}{d_o\, V - M} = \frac{30-20}{38-30} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

per cui la risposta è $5 + 4 = 9$.

6. **Gli elfi di San Valentino si divertono.** La probabilità che la moneta cada ad almeno $l/2$ da tutti i vertici è data da

$$p = \frac{\mathcal{A}_D - 12\mathcal{A}_S}{\mathcal{A}_D} = 1 - 12\,\frac{\mathcal{A}_S}{\mathcal{A}_D},$$

dove $\mathcal{A}_D$ è la superficie del dodecagono e $\mathcal{A}_S$ è la superficie del settore circolare centrato in un vertice, con raggio $l/2$ ed interno al dodecagono. Tenendo conto del fatto che il dodecagono si può scomporre in 12 triangoli isosceli, ciascuno con angoli alla base di $\frac{5\pi}{12}$, il termine $\mathcal{A}_D$ è dato da

$$\mathcal{A}_D = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 3\left(2+\sqrt{3}\right) l^2.$$

L'area di ciascun settore circolare è individuata osservando che tale settore è individuato da un angolo $\theta = \frac{5\pi}{6}$; pertanto,

$$\frac{\theta}{\mathcal{A}_S} = \frac{2\pi}{\mathcal{A}_{Cerchio}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_S = \frac{\theta}{2\pi}\,\mathcal{A}_{Cerchio} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5\pi}{48} l^2.$$

Pertanto, si ottiene

$$p = 1 - 12\,\frac{\mathcal{A}_S}{\mathcal{A}_D} = 1 - \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 1 - \frac{5\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{12} = 0.64675.$$

Quindi la risposta è 6467.

7. **Zuccherini colorati di San Valentino.** Si tratta di calcolare due volte l'area di una calotta sferica di altezza 1 e raggio della sfera 2. Applicando la nota formula si ha $S = 8\pi$, per cui la risposta è 25.

8. **Che combinazione!** Procedendo per elencazione dei casi si trova facilmente che il numero delle combinazioni richieste è 105 per cui la risposta è 510.

9. **Il compleanno di San Valentino.** Para conosce solo il mese, per cui non può sapere quando cade il compleanno di Santa Lucia, ma dice che nemmeno Doxa lo sa. Considerando il giorno, abbiamo un solo 18 (18 giugno) e un solo 19 (19 maggio) e se la santa avesse detto a Para uno tra maggio o giugno, allora Doxa avrebbe potuto già conoscere la data. Ma Para è sicuro che Doxa non lo possa ancora sapere e quindi il mese di nascita è uno tra luglio e agosto. Se il giorno fosse il 14, allora Doxa non potrebbe conoscere la data con certezza, quindi anche il 14 è escluso. Infine se il mese giusto fosse agosto, Para sarebbe ancora incerto tra il 15 e il 17, per cui il mese non è agosto. Avanza solo il 16 luglio, quindi la risposta è 1607.

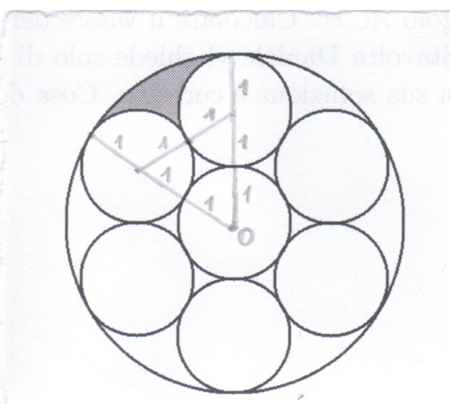
10. **Geometria a San Valentino.** Il volume di una sfera è proporzionale al cubo del raggio, mentre la superficie al quadrato del raggio. Allora, se il volume raddoppia, il raggio viene moltiplicato per il fattore $2^{1/3}$ e quindi la superficie per il fattore $4^{1/3} = 2^{2/3}$. La soluzione è quindi $2 \cdot 2^{2/3} = 2^{5/3}$ per cui la risposta è $5 + 3 = 8$.

11. **Nastri a San Valentino.** I pacchi con esattamente due nastri saranno quelli segnati con un numero multiplo di 15, ma non di 60, più quelli segnati con un multiplo di 20, ma non di 60. Nei primi 2015 numeri ci sono 134 multipli di 15, 33 multipli di 60 e 100 multipli di 20. Quindi la soluzione è $(134 - 33) + (100 - 33) = 168$ per cui la risposta è 168.

12. **7 coppie e un intruso.** Consideriamo, anzitutto, la seguente variante del problema: si determini $A_n$, numero delle ridisposizioni di $n$ ragazzi in una fila così che ogni ragazzo rimanga al suo posto o si sposti nella posizione o in una delle due posizioni occupate da chi ha di fianco. Banalmente, si ha $A_1 = 1$ ed $A_2 = 2$. D'altra parte, tenuto conto che l'$(n+1)$-esimo studente della fila, a seguito della ridisposizione, non può che rimanere nella posizione in cui si trova o scambiare il proprio posto con l'unico ragazzo che ha di fianco, risulta subito $A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$, per ogni $n \geq 2$. Consideriamo, ora, $n$ ragazzi disposti in cerchio e dimostriamo che il numero delle ridisposizioni $B_n$ degli stessi che soddisfano le richieste del problema è dato dalla legge ricorsiva $B_{n+1} = B_n + B_{n-1} - 2$, per ogni $n \geq 4$, con relativi valori iniziali $B_3 = 6$ e $B_4 = 9$. Infatti, tenuto conto che l'$(n+1)$-esimo ragazzo, a seguito della ridisposizione, non può che rimanere al proprio posto, scambiare la sua posizione con quella di uno dei due ragazzi che gli sta di fianco o spostarsi di una posizione in uno dei due sensi di percorrenza della circonferenza, seguito da tutti gli altri, si trova $B_{n+1} = A_n + 2A_{n-1} + 2$, per ogni $n \geq 2$, da cui si ricavano, banalmente, i valori iniziali $B_3 = 6$ e $B_4 = 9$. Inoltre, sfruttando il medesimo risultato, si conclude
$$\begin{aligned} B_{n+1} &= A_n + 2A_{n-1} + 2 = A_{n-1} + A_{n-2} + 2(A_{n-2} + A_{n-3}) + 2 + 2 - 2 \\ &= (A_{n-1} + 2A_{n-2} + 2) + (A_{n-2} + 2A_{n-3} + 2) - 2 = B_n + B_{n-1} - 2 \end{aligned}$$
per ogni $n \geq 4$. Tramite la formula ricorsiva trovata, si calcola, infine, direttamente $B_{15}$ che fornisce la risposta 1366.

13. **Cosa non si fa per un bacio.** Informiamo che purtroppo nel testo del problema c'erano alcuni errori tali per cui era impossibile arrivare alla soluzione inserita nel sistema informatico. Ci dispiace con chi ha tentato invano di risolvere il problema.

14. **Il cioccolataio di San Valentino.** L'area di base della zona evidenziata



risulta essere

$$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$$

per cui il volume della colata è, in $mm^3$, pari a 5320.

15. **Questione di priorità.** Siano $m$ ed $n$ il numero di quadretti del foglio lungo i due lati. Ogni rettangolo è univocamente determinato dai propri 4 vertici. Ogni vertice possiede una coordinata lungo $x$ e una lungo $y$. Per disegnare un rettangolo dobbiamo scegliere una coppia (ordinata) di coordinate lungo l'asse $x$ e una coppia (ordinata) di coordinate lungo l'asse $y$. Possiamo scegliere una coppia (ordinata) di coordinate lungo l'asse $x$ in $\frac{m(m+1)}{2}$ modi. Analogamente lungo l'asse $y$ possiamo compiere $\frac{n(n+1)}{2}$ scelte. Quindi, il numero totale di rettangoli è:

$$\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$$

Nel nostro caso $m = 12$ e $n = 13$ portano a $12 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 14/4 = 7098$.

16. **Un San Valentino a tre.** È facile vedere che non è possibile che il gioco si interrompa esattamente alla prima, seconda, quarta o quinta partita. Considerando i casi possibili si vede che la probabilità che il gioco termini esattamente alla terza partita vale $7/9$ per cui la probabilità richiesta vale $2/9$. Dunque la risposta è $2 + 9 = 11$.

17. **Un San Valentino davanti alla TV, I.** Un'urna contiene 16 bigliettini con scritto

$$A1, A2, A3, A4, B1, B2, \ldots, D4$$

ovvero il girone e un numero d'ordine nel girone. Il numero è in effetti inessenziale, basta mettere 4 biglietti per ciascun girone. Per soddisfare le richieste ci sono tre possibilità:

1 (supergirone): un girone con le 4 squadre I,S,G,Sv;

2 un girone con I,G e un altro girone con S, Sv;

3 un girone con I,Sv e un altro con S, G.

4 un girone con I,S,G e un altro con Sv;

5 un girone con altro e I,S,Sv e G in un altro.

Le tre possibilità sono mutuamente esclusive, quindi basta sommare le probabilità.

1 L'italia pesca (diciamo) $A1$; allora la Spagna ha 3 possibilità su 15 (i biglietti rimasti) di finire nello stesso girone, poi G ha $2/14$ e Sv ha $1/13$ probabilità. Totale $6/(15 \cdot 14 \cdot 13) = 1/455$;

2 I pesca $A1$; S deve andare in un altro girone, probabilità: $12/15$; G deve andare nel girone $A$: $3/14$; Sv deve andare nel girone di S: $3/13$. Totale $(12 \cdot 3 \cdot 3)/(15 \cdot 14 \cdot 13) = 18/455$;

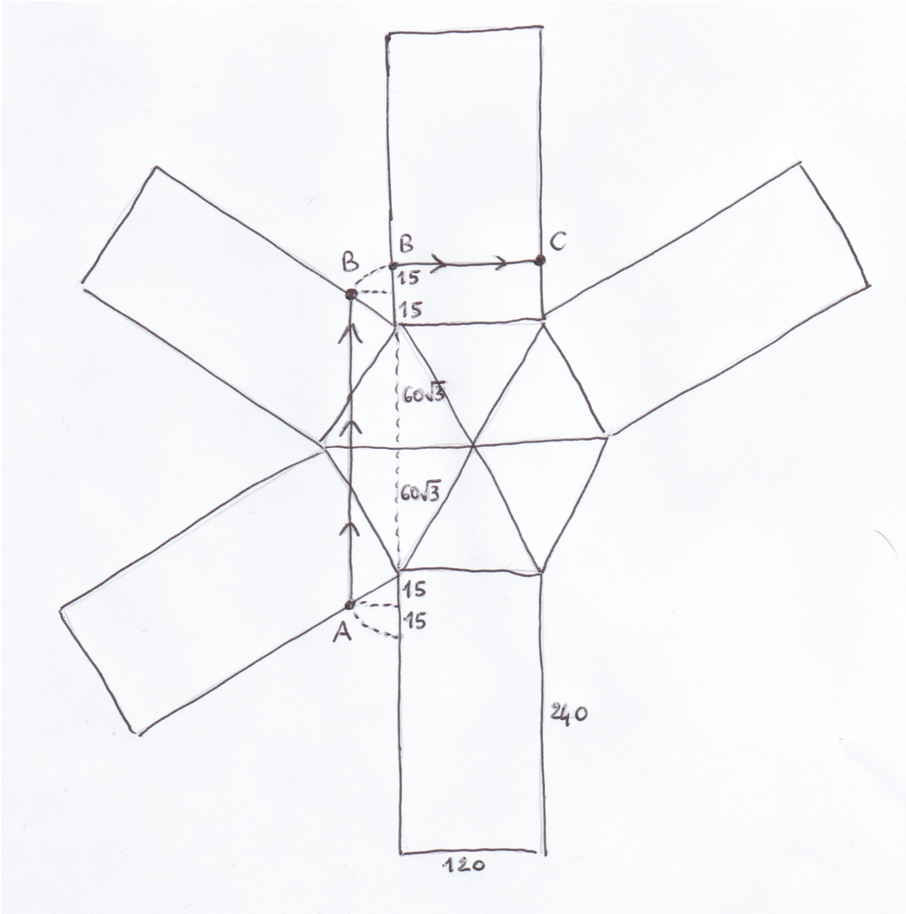
3 Il terzo caso è identico al secondo, quindi abbiamo ancora $18/455$;

4 $(3 \cdot 2 \cdot 12)/(15 \cdot 14 \cdot 13) = 12/455$;

5 $(3 \cdot 2 \cdot 12)/(15 \cdot 14 \cdot 13) = 12/455$.

In definitiva: $(1 + 18 + 18 + 12 + 12)/455 = 61/455$. Quindi la risposta è $61 + 455 = 516$.

18. **Un San Valentino davanti alla TV, II.** Nella figura seguente è riportato il percorso di lunghezza minima, in sviluppo piano del grattacielo, che James Bond deve percorrere partendo da $A$ per piazzare le successive due bombe in $B$ e $C$:




Dunque la risposta vale $150 + 120\sqrt{3}$ la cui parte intera è 357.

19. **Insolito regalo di San Valentino, I.** Siccome una mediana divide un triangolo in due triangoli equivalenti e siccome il baricentro divide ogni mediana in due parti delle quali l'una è il doppio dell'altra si ha facilmente per costruzione che la risposta è 100.

20. **Insolito regalo di San Valentino, II.** Utilizzando il fatto che il baricentro divide ogni mediana in due parti delle quali l'una è il doppio dell'altra si trova facilmente che l'area del triangolo $ABP$ vale $3\sqrt{3}$. Inoltre si trova subito che l'area del triangolo $DPC$ vale $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e dunque per differenza l'area del quadrilatero $ACPD$ vale $3\sqrt{3}$ per cui la risposta è 27.