Allenamenti di matematica: Simulazione di Gara

13 febbraio 2015

Le risposte vanno indicate con una sequenza di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre.
Approssimazioni utili: $\sqrt{2} = 1.4142$, $\sqrt{3} = 1.7321$, $\sqrt{5} = 2.2361$, $\sqrt{7} = 2.6458$, $\pi = 3.1416$.

1. **Elisir Numero 1.** Produrre elisir d'amore è un'arte complicata che richiede anni di studi e perfezionamento. L'elisir più semplice da preparare deve essere lasciato bollire in un calderone a fuoco lento per un periodo più o meno lungo a seconda di molti fattori. Paolo si è innamorato di Francesca e nel suo caso il tempo di preparazione in minuti è pari a

$$\sum_{n=1}^{400} \left[\sqrt{n}\right]$$

Quanto tempo dovrà aspettare Paolo prima che l'elisir sia pronto?
Nota: $[x]$ *denota la parte intera di* x*, ovvero il massimo intero* $n \leq x$*.*

2. **Disputa tra amanti.** Marta e Giovanni stanno organizzando la serata di San Valentino. Marta propone una passeggiata romantica in centro, Giovanni preferisce il cinema. Nonostante un lungo dibattito non riescono a trovare un accordo. Scelgono quindi di affidare alla sorte questa decisione. Prendono un sacchetto contenente dei gettoni numerati da 1 a 60. Marta estrarrà un solo gettone. I due andranno in centro a passeggiare se il gettone estratto riporterà un numero divisibile per 2 oppure per 5 oppure per 7. Con quale probabilità i due andranno al cinema? Rispondere indicando la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

3. **La moneta di Buffon.** Alcuni ragazzi giocano a lanciare una moneta di raggio 1 cm all'interno di un triangolo disegnato sul pavimento, i cui lati misurano 10, 17 e 21 centimetri. Si determini la probabilità che, dopo un lancio andato a segno (ossia un lancio nel quale il centro della moneta giace all'interno del triangolo), la moneta sia interamente contenuta nel triangolo. Se tale probabilità è $\frac{p}{q}$, con p e q relativamente primi, si fornisca come risposta il valore della differenza $q - p$.

4. **Dolci regali.** Per San Valentino Clotilde riceve un regalo dal suo fidanzato: una bellissima scatola colorata contenente cioccolatini. Nella confezione sono disposti in modo casuale 18 cioccolatini alla nocciola, 12 al caffè e 10 al cioccolato bianco. Clotilde adora quelli al caffè. Non resistendo alla tentazione, apre subito la scatola ed estrae 3 cioccolatini. Qual è la probabilità che siano tutti al caffè? Si indichino nella risposta le prime 4 cifre significative del risultato.

5. **Opere d'arte.** Alla pasticceria *Dolci Matematici* è stata ordinata una torta per il giorno di San Valentino. Deve essere una torta a 3 piani, ciascuno alto 10 cm e a forma di cuore. Per fare un lavoro ben fatto, il pasticcere si avvale di una costruzione geometrica molto precisa: disegna una parabola e poi traccia due circonferenze di raggio 10 cm, tangenti internamente alla parabola, che si intersecano in modo tale che i loro punti di intersezione giacciano sull'asse della parabola ed in modo tale che i segmenti che congiungono l'intersezione più lontana dal vertice con i punti di tangenza, che distano tra loro 32 cm, siano due diametri delle circonferenze. La figura delimitata dall'arco di parabola e dai due semicerchi più lontani dal vertice della stessa rappresenta la base del terzo strato di torta (quello più in alto). Ripete poi la costruzione facendo in modo che l'area del secondo strato sia il doppio di quella del terzo e che quella del primo sia il doppio di quella del secondo.

   Il pasticcere dispone poi armoniosamente i cuori uno sopra l'altro a formare la dolce piramide. Ora deve preparare la glassa per ricoprire la superficie del dolce, escludendo quella del fondo e le superfici laterali: sapendo che serviranno 0,5 grammi di glassa per ogni cm^2 di superficie, quanti grammi di glassa dovrà preparare al minimo per poter finire la sua opera? Rispondere indicando la parte intera del risultato.

6. **Gli anagrammi di TARTAGLIA.** Si richiede di individuare il numero n degli anagrammi della parola *TARTAGLIA* che contengono almeno una doppia ma dai quali non è possibile isolare una sequenza di tre lettere consecutive identiche. Si fornisca, poi, come risultato il numero $n/10$.

7. **Composizione di quadrilateri.** Si consideri un quadrilatero semplice e convesso i cui lati stanno tra loro come gli interi $1, 2, 4$ e 5; si costruiscano, sui medesimi, quattro quadrati e si congiungano i centri dei quadrati così ottenuti a formare un quadrilatero semplice. Sapendo che una delle diagonali di quest'ultimo misura 54 cm, se ne determini l'area in centimetri.

8. **Vasi.** Un pasticcere deve esporre in negozio 3 grandi contenitori da riempire di cioccolatini. Il primo di questi è ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo di lati 11 cm, 60 cm e 61 cm attorno al primo lato, il secondo dalla rotazione completa del medesimo triangolo attorno al secondo lato e il terzo dalla rotazione completa del medesimo triangolo attorno al terzo lato. Quanto vale, in unità di π cm, il volume del contenitore di volume minore? Se necessario, indicare nella risposta solo la parte intera della soluzione.

9. **La prova.** Giulietta costruisce una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

   - $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (x + y)[f(x) - f(y)] = f(x^2) - f(y^2);$
   - $f(0) = 1\,;$
   - $f(1) = 3\,.$

   Romeo per avere un appuntamento con lei deve dire quanto fa $f(2015)$. Che risposta deve dare Romeo?

10. **Elisir Numero 2.** Paolo pensa di aver trovato un elisir decisamente più veloce da preparare, ma non ha ancora capito quanto tempo richiede! Sia X l'insieme dei naturali che si scrivono utilizzando almeno 2 cifre diverse. Per ogni $n \in X$ definiamo A_n come l'insieme dei numeri ottenuti permutando in tutti i modi possibili le cifre di n e sia d_n il loro massimo comun divisore. Ad esempio, se $n = 1120$ allora $A_{1120} = \{112, 121, 211, 1012, 1021, 1102, 1120, 1201, 1210, 2011, 2101, 2110\}$ e $d_{1120} = 1$ poiché 112 e 121 sono coprimi. Determinare il tempo di cottura dell'elisir di Paolo sapendo che è uguale al massimo valore di d_n.

11. **Legami d'amore.** Una coppia di innamorati giunge a Roma per attaccare al ponte Milvio un lucchetto con inciso i loro nomi secondo la tradizione di San Valentino. Purtroppo i due lo agganciano al ponte sbagliato e non si ricordano più la combinazione per aprirlo, ma possiedono delle informazioni:

    - la combinazione è un codice di 4 cifre dallo 0 al 9;
    - una cifra pari è seguita da una dispari e una dispari da una pari;
    - le cifre, lette da sinistra a destra, non sono disposte in ordine crescente.

    Quanti tentativi al massimo deve fare la coppia per riaprire il lucchetto?

12. **Il peluche.** William decide di realizzare con le sue mani un regalo di San Valentino. Si procura una sfera di raggio 2 dm, per realizzare la testa del peluche, e due coni retti privi di base, aventi raggio $\sqrt{3}$ dm, che incolla sulla sfera lungo la loro circonferenza di base, in modo che siano tangenti esternamente alla sfera, per realizzare le orecchie. Quanto misura in dm^2 la superficie che William dovrà colorare? Indicare le 4 cifre più significative della risposta.

13. **Elisir Numero 3.** L'*Amortentia* è il più potente elisir d'amore noto al mondo magico. La sua preparazione è incredibilmente complessa e Romilda sta cercando di capire quanti grammi di *Uova di Ashwinder* e *Petali di Rosa* deve usare. Il libro di pozioni riporta che le due quantità, indicate con x e y rispettivamente, sono gli unici valori interi positivi che soddisfano la relazione:

    $$x^2 + 615 = 4^y\,.$$

    Fornire come risposta il prodotto xy.

14. **La pietra preziosa.** Sulla superficie del pianeta Torus è stata scoperta una pietra molto particolare. La forma di questo prezioso minerale si può ottenere facendo ruotare un trapezio rettangolo e un triangolo rettangolo, avente un cateto in comune con la base maggiore del trapezio, lungo il lato perpendicolare alle basi. La pietra è trasparente e si può notare al suo interno una sfera color rosso rubino perfettamente inscritta nella struttura esterna. La base minore del trapezio e il raggio della sfera misurano rispettivamente 1 mm e $\sqrt{2}$ mm. Sapendo che il raggio della sfera è uguale all'altezza del trapezio si calcoli il volume in mm^3 della pietra. Indicare le 4 cifre più significative della risposta.

15. **Lotteria di San Valentino.** Il negozio di San Valentino (aperto un solo giorno all'anno) ha deciso per il 2015 di istituire una lotteria per i propri clienti, mettendo in palio angioletti dorati. Ogni acquirente pescherà all'interno di una gigantesca urna una pallina, avente un numero compreso tra 1 e 4285. Il cliente vincerà il premio se il numero sulla pallina pescata avrà un numero dispari di divisori. Qual è la probabilità di vincere l'angioletto? Esprimere il risultato come somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta, dopo averla ridotta ai minimi termini.

16. **La vista dal Monte Etnom.** Il piccolo e caratteristico pianeta Atenaip ha un raggio di soli $(2\sqrt{3}+3)$ Edray, unità di misura locale che corrisponde esattamente a 2130 m. Il signor Otrebla si trova sul monte più imponente di Atenaip, alto esattamente 1 Edray. Da lì egli riesce a scorgere esattamente all'orizzonte il lago Ogal. Quanti metri dovrà percorrere il signor Otrebla dai piedi del monte Etnom (che scende a perpendicolo in direzione del lago Ogal) fino al lago Ogal?

17. **Rosso Valentino.** Un'urna contiene 200 palline di vari colori. Si estraggono due palline contemporaneamente per 100 volte, sempre reinserendole nell'urna, e per 50 volte si registra l'estrazione di due palline rosse. Qual è la migliore stima possibile per il numero di palline rosse contenute nell'urna?

18. **Giocando.** Un giocattolo per bambini è costituito da un cono di cartoncino in cui l'angolo tra la generatrice e l'asse è di $\frac{5\pi}{12}$. Viene lanciata al suo interno una palla di raggio 20 cm. Qual è la distanza in millimetri tra la superficie della palla e il vertice del cono?

19. **Giardini in vacanza.** Hai chiesto ad un vicino di innaffiare una piantina delicata mentre sei in vacanza. Pensi che senza acqua la piantina muoia con probabilità 0,8 mentre, se innaffiata, questa probabilità si ridurrebbe a 0,15. La tua fiducia che il vicino si ricordi di innaffiarla è del 90%. Con quale la probabilità ritieni che la piantina sia ancora viva al tuo ritorno? Rispondere indicando la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

20. **Una piccola rotonda.** In occasione della festa di San Faustino si è deciso di costruire una nuova fontana rotonda al cui interno verrà posta una struttura avente base triangolare perfettamente inscritta nella rotonda, interamente realizzata con marmo di Botticino. Sapendo che un lato della base triangolare misura 10 m, che un altro lato misura 5 m e che il prodotto tra il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo e il raggio della rotonda vale 10 m^2, si calcoli la misura in centimetri del raggio della rotonda, dando come risposta la parte intera del risultato.