

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\sqrt{13} = 3,6056$ $\pi = 3,1416$

I testi di questa gara, la Disfida Galattica,
sono tratti da un documento ritrovato sulla superficie
del quinto pianeta in orbita attorno alla stella Sol
(il quarto dopo la distruzione della Terra)
e sono ispirati alla più famosa trilogia in cinque parti mai pubblicata,
La Guida Galattica per Autostoppisti,
del celebre scrittore terrestre Douglas Adams.

12 gennaio 2009

Gara a Squadre - Disfida Galattica - Testi

1. La Disfida Galattica [20 punti]

Su Betelgeuse V, il pianeta natale di Ford Prefect, si svolge il torneo di matematica più importante della Galassia: la *Disfida Galattica per Autostoppisti*. Il testo della finale comprende un totale di 1000 esercizi, e vengono attribuiti 7 punti ad una risposta corretta, 2 punti ad una risposta non data, e 0 punti ad una risposta sbagliata. Curiosamente un anno i finalisti hanno ottenuto tutti un diverso punteggio, e la Commissione ha notato che con un solo finalista in più ci sarebbero stati sicuramente almeno due punteggi uguali. Quanti concorrenti sono ammessi alla finale della Disfida Galattica?

2. Le Elezioni Galattiche [20 punti]

Durante il periodo delle Elezioni Galattiche vengono fatti degli Exit Poll, basati su un campione di 10.000 persone di tre diversi pianeti. Degli intervistati che vivono sul primo pianeta, il 53% ha votato per Zaphod Beeblebrox, mentre il restante 47% ha votato per Humma Kavula. Di quelli del secondo pianeta, invece, solo il 39% ha votato per Zaphod mentre il 61% ha preferito Humma. Degli intervistati del terzo pianeta, infine, ben il 78% ha scelto Zaphod mentre solo il 22% ha votato per Humma. Sapendo che dei 10.000 elettori, il 51% vive sul primo pianeta, il 28% sul secondo e il 21% sul terzo, determinare i voti di scarto tra i due contendenti per il titolo di Presidente della Galassia.

3. I Batteri dell'Universo [25 punti]

Nell'Universo è presente una colonia di batteri molto particolare: tra il primo ed il secondo giorno della sua esistenza il numero di batteri presenti aumenta di 3, tra il secondo e il terzo giorno aumenta di 5, tra il terzo e il quarto aumenta di 7, e così via. Sapendo che il primo giorno vi sono 2 batteri, determinare quanti batteri popolano la colonia nel 42-esimo giorno.

4. Il pianeta piatto [25 punti]

Vagando per l'universo, Ford Prefect si imbatte in un pianetta piatto. Questo pianeta ha la forma di un quadrilatero (i cui vertici saranno indicati con A , B , C , D). Un anello ghiacciato perfettamente circolare sta intorno al pianeta, e i vertici giacciono su di esso. Sul medesimo anello, nel punto diametralmente opposto a D , vi è una piccola montagna: la sua posizione sarà indicata con E . Ford riesce a misurare l'angolo $\angle BCD$, che vale 60 gradi. Determinare la misura (in gradi) dell'angolo $\angle BDE$.

5. L'AstroLotto

[30 punti]

Sul pianeta piatto citato in un problema precedente gode di una certa fama l'AstroLotto, variante del gioco del lotto. Come nella versione classica, vengono estratti 5 numeri tra 90: ad essere differenti sono le modalità di vincita. Difatti, si vince solo se i numeri giocati vengono estratti proprio nell'ordine preciso della giocata, e uno dopo l'altro (quindi, per esempio, giocando 1, 2, 3 se esce 4, 1, 2, 3, 5 si vince, mentre non si vince con 1, 2, 4, 3, 5 e nemmeno con 3, 2, 1, 4, 5). Determinare la probabilità che Ford Prefect vinca giocando un ambo.

Espressa la probabilità come frazione $\frac{p}{q}$ ridotta ai minimi termini, indicare come risultato $p + q$.

6. Comunicazioni interplanetarie

[30 punti]

Tra i pianeti Leonax e Chippernix c'è sempre stata una grande rivalità. Fortunatamente i Governi Mondiali dei due Pianeti si sono provvisti di un Pesce di Babele (un traduttore universale biologico, con le sembianze di un pesce giallo) che ha permesso significativi passi avanti nelle comunicazioni. Ultimamente sono stati inventati dei telefoni super-tecnologici; ad ogni telefono corrisponde una ben precisa equazione della forma $y = f(x)$, che abbia un numero finito e non nullo di soluzioni (x, y) intere (anche negative). Per chiamare un determinato telefono basta inserire, con il tastierino numerico, il prodotto di tutti i numeri interi y per cui esiste almeno una soluzione intera (x, y) . Sapendo che si vuole attivare una connessione interplanetaria, e che l'equazione che permette di chiamare la sede del governo di Leonax è la seguente:

$$y = \frac{4x^2 - 37x + 85}{(x - 5)^2},$$

cosa bisognerà digitare sul tastierino di un cellulare di Chippernix per contattare il governo di Leonax? Indicare se necessario le ultime quattro cifre del valore assoluto del risultato.

7. La bandiera

[35 punti]

La bandiera del pianeta Leonax è a forma di triangolo rettangolo. Tale bandiera è di colore azzurro, e ha disegnati diversi segmenti che vanno a formare una linea spezzata. Il primo segmento è argentato e parte dal vertice retto della bandiera arrivando perpendicolare all'ipotenusa; consecutivo a questo vi è un secondo segmento, questa volta dorato, che parallelo al cateto maggiore arriva fino a quello minore; successivamente vi è un nuovo segmento argentato, parallelo al primo e che arriva a toccare l'ipotenusa; segue un altro segmento dorato parallelo al cateto maggiore e così via, in modo che alla fine vi siano 4 segmenti argentati e 4 dorati. Sapendo che il cateto maggiore misura 6561 Aureli (unità locale) e il segmento dorato più piccolo ne misura 256, determinare quanto vale la somma delle lunghezze dei 4 segmenti argentati.

8. Il Risiko Pangalattico

[35 punti]

Il terzo passatempo preferito degli esseri pandimensionali iperintelligenti, dopo il porsi domande sul significato della vita (abbandonato dopo la costruzione dell'immenso computer Pensiero Profondo) e l'Ultra-cricket Fottazzo (uno strano gioco che consiste nel colpire le persone all'improvviso senza nessun motivo, e poi scappare via), è il celebre Risiko Pangalattico, molto simile al gioco che, fino alla distruzione della Terra da parte dei Vogon, era molto popolare tra le forme di vita, discendenti dalla scimmie, di quel pianeta verdeazzurro; tuttavia al posto dei comuni dadi a 6 facce vengono utilizzati dadi a 20 facce. Ad un certo punto di una partita, uno dei giocatori decide di effettuare un attacco utilizzando due astronavi contro un pianeta che ne ha invece una sola. Come per le regole del Risiko terrestre, l'attaccante lancia quindi due dadi e il difensore uno; se il risultato del difensore è maggiore o uguale ai due dell'attaccante, vince la battaglia il difensore, altrimenti l'attaccante. Determinare la probabilità che il difensore riesca a resistere a questo attacco. Espressa la probabilità come frazione $\frac{p}{q}$ ridotta ai minimi termini, indicare come risultato $p + q$.

9. Gli asciugamani

[40 punti]

Come dice la *Guida Galattica per Autostoppisti*, la cosa più importante per un Autostoppista è il proprio asciugamano. A tal proposito, Ford Prefect vuole rinnovare il "guardaroba", ed entra in un negozio di asciugamani pregiati, con l'intento di comprarne esattamente 300. È possibile scegliere tra tre diversi modelli: ci sono asciugamani ricamati in oro, del costo di 18 dollari galattici l'uno; asciugamani con decorazioni d'argento del costo di 1 dollaro galattico l'uno; infine, asciugamani con finiture in bronzo, del costo di 20 centesimi di dollaro galattico l'uno. Ford vuole spendere tutto il suo budget a disposizione, di 300 dollari galattici, e, nel caso possa fare i suoi acquisti in diversi modi, vuole comprare più asciugamani in oro possibile e, a parità di questi, più asciugamani in argento possibile. Cosa acquisterà Ford? Dare come risposta nelle prime due cifre il numero di asciugamani in oro e nelle altre due il numero di asciugamani in argento.

10. Gli Astrostoppisti

[40 punti]

Come è ben noto i Vogon odiano avere sulle proprie astronavi degli Autostoppisti; è altrettanto noto che gli Autostoppisti salgono comunque molto spesso sulle astronavi dei Vogon. In un particolare viaggio, durato un numero intero di ore, per una bizzarra coincidenza accadde che, ogni ora (a partire dal momento della partenza e fino ad un'ora prima dell'arrivo), saliva su un'astronave Vogon una famiglia di Autostoppisti, composta da un certo numero di persone (non necessariamente sempre lo stesso); inoltre, per ogni famiglia salita sull'astronave accadeva che, ogni ora (cominciando un'ora dopo il suo arrivo), e fino al termine del viaggio, ne fosse scoperto (e conseguentemente buttato fuori) esattamente un componente. Sapendo che alla fine ogni Autostoppista, presto o tardi (eventualmente anche proprio alla fine del viaggio), è stato scoperto ed espulso, e che il numero massimo di Autostoppisti presenti contemporaneamente sull'astronave era 1806, determinare quante ore è durato il viaggio.

11. Il Biliardo Pangalattico

[40 punti]

Gli esseri pandimensionali iperintelligenti nel tempo libero, dopo il porsi domande sulla Vita l'Universo e Tutto quanto, dedicarsi all'Ultra-cricket Fottazzo e giocare al Risiko Pangalattico, amano anche giocare al Biliardo Pangalattico, uno speciale biliardo a forma di corona circolare, in cui il raggio della circonferenza interna vale 120 Magra-pollici e il raggio di quella esterna è pari a $80\sqrt{3}$ Magra-pollici. Benjy, che, prima di essere ucciso da Arthur Dent (non senza motivo), era uno dei migliori giocatori del suo Universo pandimensionale, in una memorabile partita riuscì a colpire la palla, che si trovava sul bordo esterno del biliardo, facendola rimbalzare alternativamente sul bordo interno ed esterno per un totale di 7 volte e tornare esattamente al punto di partenza. Sapendo che la palla ha fatto esattamente un giro all'interno della corona circolare, determinare (in Magra-pollici) la lunghezza del percorso che ha seguito. Si consideri la palla come puntiforme.

12. Le Stringhe Pangalattiche

[40 punti]

Il supercomputer Pensiero Profondo, nei suoi complicatissimi calcoli orientati alla ricerca della famosa Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Vita, l'Universo e Tutto Quanto, si trova spesso a maneggiare un particolare tipo di dati, vale a dire le n -stringhe Pangalattiche. Una n -stringa Pangalattica è una stringa che soddisfa i seguenti requisiti:

- È formata da n lettere;
- Le lettere che la compongono sono ★, ♦, ♠ (appartengono al sofisticatissimo linguaggio macchina di Pensiero Profondo), e la prima lettera è sempre la ★;
- Dopo una ★ non vi è mai una ♦, dopo una ♦ non vi è mai una ♠ e dopo una ♠ non vi è mai una ★.

Determinare quante 14-stringhe Pangalattiche distinte esistono.

13. La demolizione della Terra

[45 punti]

Per far spazio ad uno svincolo iperspaziale, è stato deciso che la Terra debba essere distrutta. Per questo è stata predisposta una flotta di astronavi di demolizione Vogon, che andranno a posizionarsi in vari punti della superficie terrestre. Per i loro calcoli, i Vogon hanno approssimato la Terra come una sfera di raggio 10 Vog-metri, che nella rappresentazione sui computer della flotta è centrata nell'origine di un sistema Kartesiano (dal nome del celebre Des Kartes, l'unico Vogon che abbia mai avuto un minimo di cervello; si sa per certo, però, che la famosa frase "*Penso dunque sono*" era prima di lui già stata pronunciata dal supercomputer Pensiero Profondo). Le astronavi di demolizione, per non rendere le cose troppo difficili, si posizioneranno nei punti a coordinate intere sulla superficie della Terra. Da quante astronavi sarà composta la flotta?

14. Il pianeta tetra

[45 punti]

Nelle vicinanze del pianeta piatto di un problema precedente, si trova un pianeta molto cupo a forma di tetraedro regolare, il cui lato misura 1000 Spanne Galattiche (una Spanna Galattica infatti è un'unità di misura molto grande). Ai quattro vertici del pianeta si trovano le quattro città più importanti, che i loro poco fantasiosi abitanti hanno chiamato A, B, C e D. Sono presenti inoltre due porti spaziali, chiamati X e Y; X si trova sulla faccia ABC, a 42 Spanne Galattiche dallo spigolo BC e ad uguale distanza da B e da C; Y si trova in una posizione analoga, ovvero sulla faccia ABD, a 42 Spanne Galattiche da BD e ad uguale distanza da B e da D. Qual è il minimo percorso (in Spanne Galattiche) che gli abitanti di questo tetra pianeta devono compiere per recarsi da X a Y?

15. Il pianeta perduto

[50 punti]

Durante uno dei loro numerosi viaggi, Arthur Dent e Ford Prefect si imbattono in un pianeta molto curioso, e scoprono che i suoi abitanti si dividono in due gruppi: i Cavatappi e i Furetti. Indagando ulteriormente vengono a sapere che i Cavatappi dicono la verità in qualsiasi circostanza, e i Furetti invece mentono sempre; d'altra parte tutti sanno a quale gruppo appartiene ogni altra persona, quindi non ci sono problemi di incomprensione. Un giorno, nel compiere uno strano rito, 16 di loro si mettono in fila indiana e a turno, cominciando da quello dietro a tutti, cominciano a parlare. Il primo dice "Dietro a me ci sono più Furetti che Cavatappi", e così dicono anche il terzo, il quinto, il settimo e così via. Il secondo invece dice "Davanti a me ci sono più Furetti che Cavatappi", e così dicono anche il quarto, il sesto, l'ottavo eccetera.

Arthur e Ford allora cominciano a riflettere intensamente, per cercare di identificare le 16 persone che hanno davanti. Quante possibili configurazioni possono presentarsi?

16. Prodotto Pangalattico

[50 punti]

Nel cercare la Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Vita, l'Universo e Tutto Quanto, il supercomputer Pensiero Profondo si è trovato di fronte ad un problema di particolare difficoltà: deve maneggiare 4 numeri reali positivi x, y, z, w a lui incogniti, e sa che la loro somma vale 9. Inoltre conosce il loro Prodotto Pangalattico, ossia la quantità $x^3 \cdot y \cdot z^4 \cdot w$. Determinare il valore massimo che può assumere tale Prodotto Pangalattico.

17. L'equimeba

[55 punti]

Sul pianeta Traal, oltre alla Vorace Bestia Bugblatta, esistono altri animali decisamente curiosi. C'è, per esempio, un organismo monocellulare, chiamato *equimeba*, dalla forma di un perfetto triangolo equilatero. Per muoversi, questo improbabile protista può compiere delle rotazioni di 180° nello spazio, ruotando intorno ad uno qualsiasi dei suoi lati (al vederlo parrebbero piccoli balzelli). Supponendo che l'essere si muova idealmente, quante diverse posizioni può raggiungere in modo da ruotare intorno ad un preciso lato (che in quel momento gli fa male) non più di 4 volte? L'equimeba può anche rimanere ferma o compiere mosse che la riportano ad una posizione precedentemente occupata.

18. L'interrogativo dei Vogon**[55 punti]**

Un gruppo di Vogon scopre sulla propria astronave alcuni Autostoppisti, e prima di cacciarli li sottopone a un particolare interrogativo. Agli Autostoppisti viene chiesto qual è il più grande numero intero < 10000 (infatti i Vogon fanno troppa fatica a pensare a numeri maggiori) che abbia esattamente 14 divisori positivi, compresi 1 e lui stesso. Se gli Autostoppisti sapranno rispondere correttamente, potranno essere buttati nello spazio profondo senza dover prima essere torturati ascoltando le poesie Vogon (che sono al terzo posto nella classifica delle peggiori poesie dell'Universo). Cosa dovranno rispondere i poveri Autostoppisti, per poter morire in pace?

19. La variante del Biliardo Pangalattico**[60 punti]**

Esiste un'altra versione del Biliardo Pangalattico, passatempo degli esseri pandimensionali iperintelligenti. In questa versione il biliardo ha la forma di un grande rettangolo, i cui lati misurano rispettivamente 70 astrometri e 42 astrometri; le buche sono in totale 4 e coincidono con i 4 vertici. La pallina, di dimensioni puntiformi, è inizialmente collocata proprio sopra ad una buca. Il gioco consiste nel mandarla nella buca più vicina, facendo sì che compia almeno 4 rimbalzi contro le sponde prima di entrarvi. Determinare la minima lunghezza che la pallina deve percorrere prima di entrare nella buca. Esprimere il risultato in astrodecimetri (sapendo che 1 astrometro equivale a 10 astrodecimetri).

20. Il palazzo del Presidente**[60 punti]**

Il palazzo presidenziale ha una storia molto lunga alle spalle, che soltanto poche persone ricordano. Infatti, quando gli architetti ricevettero l'incarico di progettarlo, scoprirono che per realizzare il cantiere avevano a disposizione 42 staccionate di legno di lunghezza rispettivamente $1, 2, 3, 4, \dots, 42$ Piedi Galattici (ovviamente un Piede Galattico è molto più lungo di un piede terrestre). Decisero quindi di costruire il cantiere formandone il perimetro con le varie staccionate a disposizione in modo che la superficie fosse la maggiore possibile. Il palazzo ha quindi tuttora la medesima forma, ovvero quella di un poligono di 42 lati. Al giorno d'oggi, per evitare le invasioni dei fans del Presidente (il quale in realtà non detiene il potere, ma serve solo a distogliere l'attenzione da coloro che ce l'hanno veramente), è stato vietato a chiunque di avvicinarsi al palazzo ad una distanza minore di 3 Piedi Galattici. Quanto vale l'area (fuori dal palazzo) che è preclusa ai visitatori?

21. Il Gioco degli Insiemi**[70 punti]**

Mentre attendono che Pensiero Profondo adempia al proprio compito, gli esseri pandimensionali si trastullano con uno strano interrogativo. Partono da un insieme contenente tutti e i soli numeri interi tra 1 e 42 (estremi inclusi) e tolgono alcuni elementi. Alla fine ottengono un nuovo insieme I che gode di una particolare caratteristica: presi a caso tre elementi di I , questi non formano mai una progressione geometrica di ragione intera. Determinare quanti possono essere al massimo gli elementi dell'insieme I .

Nota: si ricorda che tre numeri $a < b < c$ si dicono in progressione geometrica di ragione k se $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = k$.

22. La Risposta alla Domanda Fondamentale**[70 punti]**

Un giorno, dopo delle lunghissime riflessioni, un filosofo appartenente alla razza di esseri pandimensionali iperintelligenti scopre che la Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Vita l'Universo e Tutto Quanto non è 42, come affermava Pensiero Profondo, bensì 42 volte il resto della divisione per 235 di

$$(117 + 31\sqrt{14})^{42} + (117 - 31\sqrt{14})^{42}.$$

Il filosofo tuttavia non è in possesso delle abilità matematiche necessarie a calcolare questo numero. Qual è, secondo lui, la Risposta alla Domanda Fondamentale?

23. Il viaggio di Ford**[70 punti]**

Ford Prefect come è ben noto viaggia per l'Universo raccogliendo informazioni per aggiornare la *Guida Galattica per Autostoppisti*. Durante i suoi viaggi si trova nel suo sistema stellare natale, in cui 20 pianeti (numerati da 1 a 20) orbitano attorno alla stella *Betelgeuse*. Ford, che si trova sul pianeta *Betelgeuse 1*, deve arrivare su *Betelgeuse 20*, e può da ogni pianeta raggiungerne uno che abbia un numero maggiore e di parità diversa (ad esempio può andare dal 3 al 14, ma non dal 5 al 9 perché sono entrambi dispari, e nemmeno dal 12 all'1 perché $1 < 12$). In quanti modi può arrivare alla sua destinazione?

24. Gli interi profondi**[80 punti]**

L'esattezza della Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Vita, l'Universo e Tutto Quanto dipende da un particolare insieme S , formato secondo la seguente regola: dato un intero positivo x minore di 2009, allora x appartiene a S se e solo se è profondo con 2009 (diciamo che l'intero a è profondo con l'intero b se e solo se a e $a + 1$ hanno fattori primi comuni con b). Pensiero Profondo moltiplica tra loro tutti gli elementi di S e considera il resto che si ottiene dividendo il numero appena calcolato per 2009. Questa quantità, moltiplicata per 42, rappresenta il $\frac{7}{100}$ dell'errore commesso nel valutare un importante dato. Indicare a quanto ammonta l'errore commesso. Se il risultato fosse maggiore di 9999, si indichino come risposta le sue ultime 4 cifre.

Soluzioni

Num	Titolo	Punti	Risposta
1	La Disfida Galattica	20	6988
2	Le Elezioni Galattiche	20	0866
3	I Batteri dell'Universo	25	1765
4	Il pianeta piatto	25	0030
5	L'AstroLotto	30	4007
6	Comunicazioni interplanetarie	30	0105
7	La bandiera	35	7566
8	Il Risiko Pangalattico	35	1087
9	Gli asciugamani	40	1233
10	Gli Astrostoppisti	40	0084
11	Il Biliardo Pangalattico	40	0803
12	Le Stringhe Pangalattiche	40	8192
13	La demolizione della Terra	45	0030
14	Il pianeta tetro	45	0572
15	Il pianeta perduto	50	0128
16	Prodotto Pangalattico	50	6912
17	L'equimeba	55	0366
18	L'interrogativo dei Vogon	55	9664
19	La variante del Biliardo Pangalattico	60	2523
20	Il palazzo del Presidente	60	2737
21	Il Gioco degli Insiemi	70	0035
22	La Risposta alla Domanda Fondamentale	70	0042
23	Il viaggio di Ford	70	4181
24	Gli interi profondi	80	0600