

## Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale  $x$  è il più grande intero minore od uguale ad  $x$ .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:  
 $\sqrt{2} = 1,4142$     $\sqrt{3} = 1,7321$     $\sqrt{6} = 2,4495$     $\sqrt{7} = 2,6458$     $\pi = 3,1416$

24 aprile 2008

## Gara a Squadre - Allenamento Cesenatico - Testi

### 1. PIN

Paolo dice ad Alberto: “Le prime tre cifre del PIN del mio cellulare sono ai vertici di un triangolo rettangolo isoscele della tastiera, e formano un quadrato perfetto, mentre la quarta è la differenza delle cifre della radice quadrata”. Alberto ci pensa su e dice “Sì, però...” e Paolo lo interrompe: “Non devi avere dubbi”. Qual è il codice?

---

### 2. Il trifoglio

Una specie rara di trifoglio ha le foglie costruite prendendo le intersezioni a due a due di tre cerchi passanti ciascuno per due vertici e il centro di un triangolo equilatero avente lato 2 cm. Qual è l'area complessiva in  $\text{mm}^2$  delle tre foglie?

---

### 3. La codifica

Un sistema di codifica *per la verità assai patocco* cambia casualmente ogni lettera con la precedente (nell'alfabeto circolare) oppure con la successiva, con l'accortezza però di non produrre mai due lettere uguali in ogni parola codificata. Secondo queste regole, quante codifiche possibili esistono della parola 'DISFIDA'?

---

### 4. Passeggiata

Un matematico passeggia distrattamente lungo un viale circolare lungo 199 metri lastricato con piastrelle quadrate di 20 centimetri di lato. Il suo piede poggia sempre per intero su una piastrella, e casualmente cammina in modo tale che le piastrelle calpestate corrispondono al *passo del cavallo*, ovvero ad uno spostamento laterale di una piastrella (alternativamente a destra e a sinistra) e avanti di due piastrelle.

Quanti passi ha effettuato quando calpesta per la prima volta una piastrella già calpestata?

---

### 5. L'acquario

In un acquario è stata immessa una coppia di *Fellorius Rosatus*, nota famiglia di pesci tropicali che si riproducono facilmente in cattività. Mensilmente ogni coppia mette alla luce 10 piccoli che nella percentuale del 70% sono maschi. Sapendo che dopo 2 mesi i nuovi nati sono a loro volta in grado di riprodursi e che oggi sono nati i primi piccoli della prima coppia, quanti pesci ci saranno nell'acquario tra 6 mesi?

---

### 6. Asteroide

Sull'asteroide Klein 24, a forma di icosaedro, un esploratore vuole percorrere il cammino più breve da un vertice a quello opposto, anche camminando sulle facce. Se lo spigolo dell'asteroide è di 155 chilometri, quanto è lungo il cammino in chilometri?

---

### 7. Incidente sul lavoro

Una trave lunga 10 metri è appoggiata in orizzontale su un muro e sporge per metà della sua lunghezza. All'estremo della trave, dalla parte del muro, sono collocati 20 sacchi di cemento, ognuno del peso di 25 kg. Un muratore che pesa 70 kg trasporta i sacchi uno alla volta all'estremo opposto della trave, impilandoli uno sull'altro. A quale distanza dal punto medio della trave il muratore cadrà?

Si esprima la soluzione nella forma  $nndd$ , dove  $nn$  sono le cifre del numeratore e  $dd$  quelle del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

---

### 8. Grandi numeri

Si prenda il numero  $32!$  e si immagini di scriverlo in binario. Poi lo si interpreti in decimale e lo si riscriva in binario. Con quanti zeri termina l'ultimo numero?

---

### 9. Il cratere

Una formica si trova su un punto della circonferenza di base di un buco a forma di cono circolare retto, il cui raggio di base misura un metro, e vuole raggiungere il punto diametralmente opposto. Essa calcola che se scendesse con percorso rettilineo fino al vertice del cono e risalisse dall'altra parte, percorrerebbe 4 metri.

Qual è invece la distanza minima *in millimetri* che deve percorrere?

---

#### 10. L'imbianchino

Un imbianchino deve pitturare una palizzata molto lunga, e calcola che la sua velocità può essere di 100 metri al giorno. Purtroppo, l'affaticamento gioca brutti scherzi, per cui risulta che la velocità effettiva diminuisce di un metro al giorno dopo il primo giorno di lavoro.

Quanti giorni deve impiegare per percorrere almeno 4000 metri?

---

#### 11. Il trasloco

Una ditta di traslochi deve portare un'asta di diametro trascurabile e lunga un numero intero di centimetri da un estremo ad un altro di un corridoio ad L di larghezza 120 centimetri e altezza 240 centimetri. Quanto è lunga come minimo l'asta per rendere impossibile l'operazione?

---

#### 12. Contiamo gli zeri

Quanti zeri ci sono nella rappresentazione binaria del numero  $1028^4$ ?

---

#### 13. Il campionato di calcio

Ad un campionato di calcio a girone unico partecipano 8 squadre. In quanti modi diversi può presentarsi il calendario della prima giornata, tenendo conto delle partite in casa e fuori casa (ma non dell'ordine delle partite)?

---

#### 14. La discarica

La discarica abusiva di Vattelapesca ha una forma molto particolare data dall'unione di due quadrati di 18 metri di lato che si sovrappongono parzialmente in modo che la parte sovrapposta formi un rettangolo 6 metri per 12. L'immondizia è stata ammucchiata in modo che la superficie esposta si inerpichi ovunque con una pendenza di 45 gradi e il mucchio di spazzatura sia l'unione di due piramidi. Al centro esatto dei due quadrati si trova di conseguenza la cima, di uguale altezza, delle due montagne gemelle. Quanti metri cubi di spazzatura ci sono nella discarica?

---

### 15. Lego

Andrea ha aperto una confezione di mattoncini Lego contenente 75 mattoncini standard (2 cm  $\times$  1 cm) e una base rettangolare. Dispone una prima fila di mattoncini a formare i lati di un rettangolo sul bordo della base e poi prosegue costruendo una piramide: in ogni nuova fila i mattoncini formano un rettangolo più piccolo del precedente, su cui è sovrapposto per metà dello spessore. Ne risulta alla fine una sorta di tetto a forma di piramide in cui lo strato più alto consiste in una singola fila di mattoncini (tutti voi lo avete fatto da bambini, vero?) Alla fine Andrea si accorge di aver utilizzato esattamente tutti i mattoncini a sua disposizione. Quali sono le dimensioni della base? (scrivere la soluzione come  $aabb$  dove  $aa$  e  $bb$  indicano rispettivamente la lunghezza e la larghezza in centimetri).

---

### 16. Cassetta di birra

Una cassetta di birra con lattine cilindriche coricate è larga 48 cm e viene riempita di lattine di diametro 8 cm, in modo che ciascuna di quelle sovrastanti una fila tocchi due di quelle sotto, a parte quelle agli estremi, per ottenere l'impaccamento migliore. Dopo tre file di lattine interamente contenute, la quarta sporge di 4 cm dal bordo. Se la cassetta è profonda 15 cm, tanto quanto le lattine, qual è, in  $\text{cm}^3$ , il volume perso nella cassetta?

---

### 17. Pozzanghere

Piove. In strada ci sono due grosse pozzanghere. Considerando solo le gocce che cadono nelle due pozzanghere uno statistico calcola che mediamente queste cadono in una pozzanghera di area 1002,5 decimetri quadrati. Sapendo che l'area media delle due pozzanghere è di 1000 decimetri quadrati, qual è l'area della pozzanghera più grande?

---

### 18. La scacchiera

Una torre si muove su una scacchiera 8x8 nel solito modo (orizzontale e verticale), e deve andare dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra seguendo un percorso minimo ed effettuando esattamente quattro cambi di direzione. Quanti percorsi diversi può seguire?

---

### 19. Il gelato

Una pallina di gelato sferica di raggio  $16/\sqrt[3]{75}$  cm è stata posta su un cono circolare retto il cui rapporto tra l'apotema e il raggio di base vale 5. Inizialmente il cono è tangente alla pallina lungo la circonferenza di base. Man mano che il gelato si scioglie, questo confluisce nel cono, e la pallina scivola verso l'interno del cono, mantenendo sempre la forma sferica. A quale distanza in cm dal vertice la pallina di gelato toccherà il gelato sciolto?

Si esprima la soluzione nella forma  $nndd$ , dove  $nn$  sono le cifre del numeratore e  $dd$  quelle del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

---

### 20. Alieni

I linguisti hanno sostanzialmente decifrato il linguaggio dei marziani, che però ha una sconcertante particolarità: moltissimi concetti di significato opposto vengono espressi con la stessa parola. Di conseguenza le loro affermazioni hanno spesso un oscuro significato. Viene ricevuto un segnale che i linguisti hanno tradotto come segue:

- $a$  è **il successore** di  $b$  e  $c$  è **il doppio** di  $b$ ;
- $c$  è **il successore** di  $d$  e  $c$  è **il successore** di  $e$ ;
- $f$  è **il quadrato** di  $d$  e  $f$  **divide** 7;
- $d$  è **minore** di 1 ed  $e$  **divide** 17;

Le parti in grassetto rappresentano concetti ambigui, in particolare  $x$  è *il successore di  $y$*  può significare sia  $x = y + 1$  che  $x = y - 1$ ,  $x$  è *il doppio di  $y$*  può anche voler dire  $x$  è *la metà di  $y$* , analogamente *quadrato* può significare *radice quadrata*, *minore* può significare *maggiore*, *divide* può significare *è multiplo di*.

Sapendo che  $a$  è un numero primo, qual è il suo più piccolo valore compatibile con il messaggio degli alieni?

**Nota:** I marziani conoscono soltanto i numeri naturali strettamente positivi.

---

## 21. Il mucchio

Da un mucchio di 52 sassi, due giocatori a turno devono prelevare un numero di sassi compreso tra 1 e 12; vince il giocatore che toglie l'ultimo sasso. Una sola volta durante la partita ciascun giocatore può *giocare il jolly*, ovvero raddoppiare per quel turno il numero di sassi che può prelevare (quindi fino ad un massimo di 24). Il gioco viene poi ripetuto una seconda volta a partire però da un mucchio di 2008 sassi. Quanti sassi deve prelevare il primo giocatore per vincere? Scrivere la risposta nella forma  $aabb$ , dove  $aa$  si riferisce alla prima partita e  $bb$  si riferisce alla seconda partita. Ad esempio 0203 indica che nella prima partita il primo giocatore vince prelevando 2 sassi, e nella seconda partita vince prelevando 3 sassi.

Indicare 00 se il primo giocatore non ha una strategia vincente, indicare 99 se c'è più di una mossa iniziale che garantisce la vittoria.

---

## 22. Le basi antartiche

Le due basi Alef e Bet si trovano in antartide alla stessa latitudine, ma da parti opposte rispetto al polo sud. Al polo sud viene eretta una torre con in cima uno specchio la cui quota è sufficiente a permettere lo scambio di segnali luminosi tra le due basi. In altre parole un segnale luminoso parte tangenzialmente alla superficie terrestre da Alef, rimbalza in cima alla torre e raggiunge Bet ancora tangenzialmente alla superficie terrestre. In questo tragitto il segnale percorre una distanza che supera di esattamente 90 centimetri la distanza tra le due basi misurata sulla superficie terrestre. Quanto è alta la torre in metri? Si scriva solo la parte intera del risultato, se ad esempio la soluzione risultasse 965,789 metri si scriverà 0965.

**Nota 1:** Immaginiamo che la Terra sia una sfera perfetta avente raggio pari a 6250 chilometri.

**Nota 2:** Per angoli piccoli si può approssimare  $\tan \alpha$  con  $\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$ .

---

### 23. Calcolatore ternario

Gli ingegneri della JCN hanno progettato un computer innovativo in cui, sfruttando proprietà elettriche a livello atomico, hanno raggiunto livelli di miniaturizzazione mai visti. Le unità di memoria elementari sono i *trit*, che possono assumere tre valori (0, 1, 2) anziché i soliti due valori dei classici bit. I *trytes* sono gruppi di 9 *trit* destinati a contenere numeri naturali non negativi, espressi in base 3.

Sfortunatamente, un grossolano errore di progettazione ha l'effetto di mandare in tilt il computer non appena due trit consecutivi di uno stesso tryte assumono uno stesso valore non nullo.

Non è ad esempio possibile rappresentare numeri come 011201021 a causa della coppia di 1 consecutivi, mentre è possibile utilizzare 010000210 perché le sequenze di 0 non danno problemi.

Quante sequenze diverse possono essere utilizzate in un tryte senza mandare in tilt il computer?

---

### 24. Tre formiche

Le tre formiche  $A$ ,  $B$ ,  $C$  si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato 4713. Iniziano simultaneamente a muoversi con velocità costante in modo che  $A$  si dirige sempre verso  $B$ ;  $B$  si dirige verso  $C$  e  $C$  si dirige verso  $A$ . Quanta strada ha percorso ciascuna di esse quando si incontrano?

**Suggerimento:** studiare prima il caso di quattro formiche ai vertici di un quadrato.